Решение уравнения Дирака в магнитном поле

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu - m)\psi(x) = 0$$

калибровка: $\vec{B} \parallel z \Rightarrow A^\mu = (0, 0, xB, 0)$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(x) = \hat{H}\psi(x), \quad \hat{H} = \gamma_0[\vec{\gamma}(\hat{\vec{p}} + e\vec{A})] + m\gamma_0$$

$$\hat{\vec{p}} = -i\vec{\nabla}$$

no time-dependence

$$\psi(X) = e^{-ip_0 t}\psi(x,y,z) \qquad \hat{H}\psi = p_0\psi$$

$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$, $\gamma_5 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$

Рассм. оператор $\hat{T}^0 = \frac{1}{m}[\vec{\Sigma}(\hat{\vec{p}} + e\vec{A})]$ $\Big|$ $\vec{\Sigma} = \gamma_0\vec{\gamma}\gamma_5 = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$

$$\hat{T}^0 = \begin{pmatrix} \hat{\tau}^0 & 0 \\ 0 & \hat{\tau}^0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\tau}^0 = \frac{1}{m}[\vec{\sigma}(\hat{\vec{p}} + e\vec{A})]$$

$[\hat{H}, \hat{T}^0] = 0 \Rightarrow \psi_T$ (собств. ф-ции оператора $\hat{T}$) = собств. ф-ции $\hat{H}$

$$\hat{\tau}^0 = \frac{1}{m}\left[\sigma_x\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) + \sigma_y\left(-i\frac{\partial}{\partial y} + \beta x\right) + \sigma_z\left(-i\frac{\partial}{\partial z}\right)\right] \qquad \beta = eB$$

$\hat{T}^0$ не зависит явно от y и z $\Rightarrow$

$$\psi_T(x,y,z) = e^{i(p_y y + p_z z)}\begin{pmatrix} F(x) \\ \varkappa F(x) \end{pmatrix}, \qquad F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$$

$$\hat{\tau}^0\psi_T = \frac{1}{m}\left[\sigma_z \cdot p_z + \sigma_y \cdot p_y + \sigma_x\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) + \sigma_y \cdot \beta x\right]F(x)$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\tau}^0\psi_T = \frac{1}{m}\left[\begin{pmatrix} p_z & -ip_y \\ ip_y & -p_z \end{pmatrix} + \sigma_x\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) + \sigma_y\beta x\right]F(x).$$

№. Док-ть, что ур. сводится к

$$\frac{1}{m}\begin{pmatrix} p_z & -i\sqrt{2\beta}\,a^- \\ i\sqrt{2\beta}\,a^+ & -p_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1(\xi) \\ f_2(\xi)\end{pmatrix} = T^0\begin{pmatrix} f_1(\xi) \\ f_2(\xi)\end{pmatrix}, \quad (A)$$

где $\xi = \sqrt{\beta}\left(x + \frac{p_y}{\beta}\right)$, $\quad a^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi \mp \frac{d}{d\xi}\right)$

(A) - система диффуров.

решение: $f_1(\xi) = \frac{-i\sqrt{2\beta}}{m_e T^0 - p_z}\, a^- f_2(\xi)$

$$\left(a^+a^- - \frac{m_e^2 (T^0)^2 - p_z^2}{2\beta}\right) f_2(\xi) = 0$$

$$\left(\frac{d^2}{d\xi^2} - \xi^2 + 1 + \frac{m_e^2(T^0)^2 - p_z^2}{\beta}\right) f_2(\xi) = 0.$$

$$\frac{m_e^2(T^0)^2 - p_z^2}{\beta} = 2n$$

$f_2(\xi)$ - соб.св. ф-я при таких значениях T^0

$$T^0 = \pm\frac{1}{m_e}\sqrt{p_z^2 + 2n\beta}$$

$V_n(\xi)$ — волновая ф-я осциллятора.

$f_2(\xi) = C\cdot V_n(\xi)$

$f_1(\xi) = C\cdot\frac{-i\sqrt{2n\beta}}{m_e T^0 - p_z} V_{n-1}(\xi).$

$$\hat{H} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} (\vec{p} - e\vec{A})}_{m_e \hat{T}_0} + m_e \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$m_e \begin{pmatrix} 1 & T_0 1 \\ T_0 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(x) \\ \varkappa F(x) \end{pmatrix} = p_0 \begin{pmatrix} F(x) \\ \varkappa F(x) \end{pmatrix}$$

$1 + \varkappa T_0 = p_0/m_e$ $\qquad \varkappa = \frac{\tilde{p}_0 - 1}{T_0}$ $\qquad \tilde{p}_0 = p_0/m_e$

$T_0 - \varkappa = \varkappa\, p_0/m_e$ $\qquad T_0 = \frac{\tilde{p}_0 - 1}{T_0}(\tilde{p}_0 + 1)$

$$\tilde{p}_0^2 = (T_0^2 + 1)\, m_e^2$$

$p_0 = \pm E_n$

$$E_n = m_e \sqrt{(T_0)^2 + 1} = \sqrt{p_z^2 + m_e^2 + 2n\beta} \quad \Big\| \quad T_0 = \pm \frac{1}{m_e}\sqrt{p_z^2 + 2n\beta}$$

$$T_0^2 = \frac{E_n^2}{m_e^2} - 1 \quad \Big\|$$

$$\varkappa = \frac{\pm E_n - m_e}{m_e T_0} \Rightarrow \varkappa_{E_+} = \frac{E_n - m_e}{\pm\sqrt{E_n^2 - m_e^2}} = \pm\sqrt{\frac{E_n - m_e}{E_n + m_e}}$$

Solutions $p_0 = +E_n$ $\qquad \varkappa_{E_-} = \frac{-E_n - m_e}{\pm\sqrt{E_n^2 - m_e^2}} = \mp\sqrt{\frac{E_n + m_e}{E_n - m_e}}$

[illegible]

$$\psi^{(+\pm)}(x) = A^{(+\pm)} e^{-i(E_n t - p_y y - p_z z)} u^{(+\pm)}(\xi)$$

$$u^{(++)}(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{-i\sqrt{2n\beta}}{\sqrt{p_z^2 + 2n\beta} - p_z} V_{n-1}(\xi) \\ V_n(\xi) \\ \sqrt{\frac{E_n - m_e}{E_n + m_e}} \frac{-i\sqrt{2n\beta}}{\sqrt{p_z^2 + 2n\beta} - p_z} V_{n-1}(\xi) \\ \sqrt{\frac{E_n - m_e}{E_n + m_e}} V_n(\xi) \end{pmatrix} \qquad u^{(+-)}(\xi) = \begin{pmatrix} -''- \\ -''- \\ -\ -''-\ (-) \\ -\ -''- \end{pmatrix}$$

$$\xi = \sqrt{\beta}\left(x + \frac{p_y}{\beta}\right)$$

От (±) перейдём к линейной комбинации - спинами

$$\cancel{\psi^{(+)}_{n,p_y,p_z,s}} = \psi^{(+)}_{n,p_y,p_z,s}(x) = \frac{e^{-i(E_n t - p_y y - p_z z)}}{\sqrt{2E_n(E_n+m)L_yL_z}} U^{(+)}_{n,p_y,p_z,s}(\xi)$$

$$U^{(+)}_{s=+1}(\xi) = \begin{pmatrix} (E_n+m_e)V_{n-1}(\xi) \\ 0 \\ p_z V_{n-1}(\xi) \\ i\sqrt{2n\beta}\, V_n(\xi) \end{pmatrix} \qquad U^{+}_{s=-1}(\xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ (E_n+m_e)V_n(\xi) \\ -i\sqrt{2n\beta}\, V_{n-1}(\xi) \\ -p_z V_n(\xi) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{E_n = \sqrt{p_z^2 + m_e^2 + 2n\beta}}$$

Отриц. частотные решения аналогично. Легче записать через $\xi^- = \sqrt{\beta}\left(x - \frac{p_y}{\beta}\right)$

$$U^{(-)}_{s=+1}(\xi^-) = \begin{pmatrix} p_z V_{n-1}(\xi^-) \\ -i\sqrt{2n\beta}\, V_n(\xi^-) \\ (E_n+m_e)V_{n-1}(\xi^-) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad U^{(-)}_{s=-1}(\xi^-) = \begin{pmatrix} i\sqrt{2n\beta}\, V_{n-1}(\xi^-) \\ -p_z V_n(\xi^-) \\ 0 \\ (E_n+m_e)V_n(\xi^-) \end{pmatrix}$$

Нулевой уровень Ландау.

положит. частотные

$n=0$ нет $V_{-1}(\xi)$,

существует только для $s=-1$

(не вырожден по спину)

$$U^{(+)}_{n=0,s=-1}(\xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ E+m_e \\ 0 \\ -p_z \end{pmatrix} e^{-\xi^2/2}$$

$E \equiv E_0 = \sqrt{p_z^2 + m_e^2}$ — эффективно 1+1-мерие

$E_n = \sqrt{p_z^2 + m_e^2 + 2n\beta}$ // Когда можно учитывать только нулевой уровень Ландау?

Когда $\beta \gg m_e^2$, $\beta \gg E^2$

Пропагатор.

$$S(x,x') = T(\psi(x)\bar\psi(x')) - N(\psi(x)\bar\psi(x'))$$

$$S(x,x')\big|_{t>t'} = \int \sum_{n,s,p_y,p_z} \psi_{n,s,p_y,p_z}(x)\,\bar\psi_{n,s,p_y,p_z}(x')\,\frac{dp_y\,dp_z}{(2\pi)^2}$$

$$S(x,x') = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(x,x')$$

$$S_n(x,x') = \int \frac{dp_y\,dp_z}{(2\pi)^2}\, e^{\,i(-E_n(t-t') + p_y(y-y') + p_z(z-z'))}$$

$$\cdot \sum_{s=\pm 1} u^{n}_{n,s}(\xi)\,\bar u_{n,s}(\xi')$$

$$S_n(x,x') = \frac{i}{2^n n!}\sqrt{\frac{\beta}{\pi}}\exp\left(-\beta\frac{x^2+x'^2}{2}\right)\int \frac{dp_0\,dp_y\,dp_z}{(2\pi)^3}\,\cdot$$

$$\cdot\,\frac{e^{-ip_0(x_0-x_0') + ip_z(z-z')}}{p_0^2 - p_z^2 - m_e^2 - 2\beta n + i\varepsilon}\exp\left[-\frac{p_y^2}{\beta} - p_y[x+x' - i(y-y')]\right]$$

$$\times\Big[\big([p_0\gamma_0 - p_z\gamma_z] + m_e\big)\big(\Pi_- H_n(\xi)H_n(\xi') + \Pi_+ 2n\, H_{n-1}(\xi)H_{n-1}(\xi')\big)$$

$$+\, i\, 2n\sqrt{\beta}\,\gamma^1\left[\Pi_- H_{n-1}(\xi)H_n(\xi') - \Pi_+ H_n(\xi)H_{n-1}(\xi')\right]\Big]$$

$$\Pi_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm i\gamma^1\gamma^2)$$

$n=0$ выделяется. $\displaystyle\int dp_0\,dp_z\,\frac{e^{-i(p(x-x'))_{\parallel}}}{p_{\parallel}^2 - m_e^2 + i\varepsilon}\cdot (p\gamma)_{\parallel} + m_e$

— двумерие. $\;S_n(x,x') = e^{\,i\Phi(x,x')}\, S_n(x-x')$.